«19»

قواعد الاشتقاق

1) $\frac{d}{dx}(A) = 0$ A= constant A: أي عدد

2) $\frac{d}{dx}(x^n) = n x^{n-1}$

3) $\frac{d}{dx}[f(x)]^n = n(f(x))^{n-1} \cdot f`(x)$

4) $(f \cdot g)` = f \cdot g` + g \cdot f`$

5) $\left(\frac{f}{g}\right)` = \frac{g \cdot f` - f \cdot g`}{g^2}$

6) $[\sqrt{f(x)}]` = \frac{f`(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

7) $\left(\frac{A}{x}\right)` = \frac{-A}{x^2}$

8) $[e^{f(x)}]` = f`(x) \cdot e^{f(x)}$ e = 2.718281828

9) $[a^{f(x)}]` = f`(x) \cdot a^{f(x)} \cdot \ln a$

10) $x \cdot y \rightarrow y` = ??$ Implicit derivatives.

الاشتقاق الضمني

« 20 »

Ex: $y = (2x+3)^4 \cdot (3x-4x)^2$ Find y' ?

$y' = (2x+3)^4 \cdot 2(3x^2-4x) \cdot (6x-4) + (3x^2-4x)^2$

$\cdot 4(2x+3)^3 \cdot (2)$ المثال تطبيق على القاعدة رقم 4.

Ex: $y = \frac{x^2+3}{x-1}$ Find y' ?

$y' = \frac{(x-1)(2x)-(x+3)(1)}{(x-1)^2}$ المثال تطبيق على القاعدة رقم 5.

Ex: $y = \frac{3}{(x^2+4)}$ Find y' ?

$y' = \frac{-3(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{-6x}{(x^2+4)^2}$ المثال تطبيق على القاعدة رقم 7.

- another solution

$y' = 3 \cdot (x^2+4)^{-1} \longrightarrow 3 \cdot (-1)(2x)(x^2+4)^{-2}$

$y' = \frac{-3(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{-6x}{(x^2+4)^2}$

نحول الكسر إلى بسط ونشتق ونضع الأس السالب في المقام.

Ex: $y = \sqrt{2x^2 - 3x}$ Find y' ?

$y' = \frac{4x - 3}{2\sqrt{2x^2 - 3x}}$.المثال تطبيق على القاعدة رقم 6

Ex: Find $[e^{f(x)}]'$?

1- $e^{x^2} = 2x \cdot e^{x^2}$.المثال تطبيق على القاعدة رقم 8

2- $e^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}}$

Ex: Find $[a^{f(x)}]'$?

1- $3^{2x} = 2 \cdot 3^{2x} \cdot \ln 3$

.المثال تطبيق على القاعدة رقم 9

2- $5^{4x} = 4 \cdot 5^{4x} \cdot \ln 5$

Ex: $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^{-x} + 1}$ Find y' ?

$y' = \frac{(e^{-x}+1)(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x}) \cdot -e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2}$

.المثال تطبيق على القاعدة رقم 8و5

Ex: Find:

1- $e^{-x} \cdot e^{x} = e^{-x+x} = e^{0} = 1$

2- $(e^{2x})^{x} = e^{2x^2}$

3- $e^{2x} \div e^{3x} = e^{2x-3x} = e^{-x}$

• Implicit:

Ex: $x^3 + 3xy^2 = 5x$ Find y' ?

$y' = 3x^2 + 3(x \cdot 2yy' + y^2 \cdot 1) = 5$

$y' = 3x^2 + 6xyy' + 3y^2 = 5$

$y' = \dfrac{5 - 3x^2 - 3y^2}{6xy}$

• كل ترم لا يوجد به y' ينقل لليمين بإشارة مخالفة وكل ترم يوجد به y' يوضع في المقام.

Ex: $5x^2 + x^2y^2 - 5y^3 = 3$ Find y'?

$y' = 10x + (x^2 \cdot 2yy' + y^2 \cdot 2x) - 15y^2y' = 0$

$y' = 10x + 2x^2yy' + 2xy^2 - 15y^2y' = 0$

$$y' = \frac{-10x - 2xy^2}{2x^2y - 15y^2}$$

Find $\frac{dy}{dx}$ where $y = u^2 + 1$, $u = 3x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2u \cdot 6x$$

$$\frac{dy}{dx} = 2(3x^2) \cdot 6x$$

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 \cdot 6x = 36x^3$$

• another solution:

$y = (3x^2)^2 + 1 = 9x^4 + 1$

$y' = 36x^3$

Find $\frac{dy}{dx}$ where $y = u^2 + 5u$, $u = \sqrt{x}$?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = (2u + 5) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = (2\sqrt{x} + 5) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

• Properties:

1) $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$

2) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

3) $\ln x^n = n \ln x$

4) $\ln 1 = 0$, $\ln e = e^{\ln} = 1$

• $\ln e^x = x$, $e^{\ln x} = x$

« 25 »

Ex: $5 \ln x - \frac{1}{2} \ln y + 3 \ln z$

$= \ln x^5 - \ln y^{\frac{1}{2}} + \ln z^3$

$= \ln \frac{x^5 \cdot z^3}{y^{\frac{1}{2}}}$

• formala:

1) $\ln y = \frac{y'}{y}$

2) $\ln x = \frac{1}{x}$

3) $\ln x^2 = \frac{2x}{x^2}$

Ex: $[\ln (x^2 - 5x + 3)]'$

$= \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 3}$

Ex: $y = \left[\frac{(x^2+5)^4 \cdot (x^3-5x)^3}{(2x+1)^6} \right]^{\frac{1}{3}}$

$\ln y = \frac{1}{3} \left[4 \ln (x^2+5) + 3 \ln (x^3 - 5x) - 6 \ln (2x+1) \right]$

Find The derivative of two sides :

• تابع للحل في المثال السابق

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\left[4\frac{2x}{x^2+5} + 3\frac{3x^2-5}{x^3-5x} - 6\frac{2}{2x+1}\right]$$

$$y' = \left(\frac{(x^2+5)^4 \cdot (x^3-5x)^3}{(2x+1)^6}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3}\left[4\frac{2x}{x^2+5} + 3\frac{3x^2-5}{x^3-5}\right.$$

$$\left. - 6\frac{2}{2x+1}\right]$$

• Application:

1) growth → $P'(x) = 0.01\, P(x) \Rightarrow P(x) = P(0) \cdot e^{0.01t}$

2) decay → $P'(x) = -0.03\, P(x) \Rightarrow P(x) = P(0) \cdot e^{-0.03t}$

• P(0) = Initial (بدء العد) الشرط الابتدائي

• Any number = constant الحد الثابت

• t = time الوقت

• لمعرفة السؤال توجد صورتين للدالة عليه إما differential equation أو $P'(x)$

• لو سأل على Fast هي نفسها $P'(x)$

• أول ما يعطينا $P'(x)$ نحول إلى $P(x)$

• لايجاد المطلوب من السؤال نستخدم ln أو الحاسبة

Ex: Slide 48 in tutorial 5

$= P_{(x)} = P_{(0)} \cdot e^{kt}$

$= 5.88 = 5.51 \cdot e^{k(5)} \Longrightarrow \frac{5.88}{5.51} = e^{5k}$

$= \ln \frac{5.88}{5.51} = \ln e^{5k} \Longrightarrow 5k \ln e$

$= 0.065 = 5k \Longrightarrow \frac{0.065}{5} = k$

$= k = 0.013 \Longrightarrow P_{(t)} = 5.51\, e^{0.013t}$

$7 = 5.51 e^{0.013t} \Longrightarrow \frac{7}{5.51} = \frac{5.51}{5.51} e^{0.013t}$

$= \ln \frac{7}{5.51} = \ln e^{0.013t} \Longrightarrow 0.239 = 0.013t$

$= \frac{0.239}{0.013} = \frac{0.013}{0.013} t \Longrightarrow 18.41 = t$

$t = 1993 + 18.41 \Longrightarrow t = 2011.41 \approx 2011$

Ex: Slide 50 in tutorial 5

$P'(t) = -0.00043\, P(t) \Longrightarrow P(t) = 12\, e^{-0.00043t}$

a) $P(t) = 12\, e^{-0.00043t}$

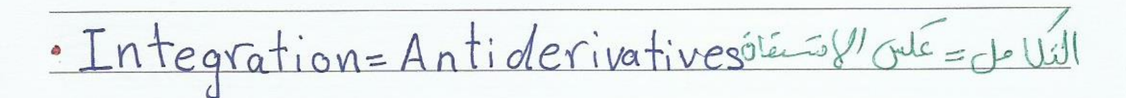
b) $P(0) = 12$

c) $-0.00043 = K$

d) $P(943) = 12 \cdot e^{-0.00043(943)} \longrightarrow P(943) = 8$

e) $P'(t) = -0.00043\, P(t) \Longrightarrow P'(t) = -0.00043 \cdot 1$

$P'(x) = -0.00043$



• Integration = Antiderivatives التكامل = عكس الاشتقاق

1) $\int A\,dx = Ax + c$

2) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

3) $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$

4) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$

5) $\int f'(x) \cdot [f(x)]^n\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$

Ex:

1) $\int 3\,dx = 3x + c$

2) $\int \sqrt{5}\,dx = \sqrt{5}\,x + c$

3) $\int 5\,dy = 5y + c$

4) $\int \sqrt{7}\,dt = \sqrt{7}\,t + c$

• هذا المثال على القاعدة رقم ١